
Deuxième partie

Rappel sur les nombres réels

1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels positifs** $\{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **rationnelles**, i.e $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.
- $\mathbb{R}$ représente l'ensemble des **nombres réels** et l'on a les inclusions suivantes : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est appelé l'ensemble des **irrationnelles**.
- Pour chacun de ces ensembles, l'ajout du signe $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*$ et $\mathbb{R}^*$.

2 Axiomes des nombres réels

On sait que :

- i) L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ est muni des opérations usuelles et internes :
l'addition $+: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$ et la multiplication $\cdot: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$
constitue **un corps commutatif**, c'-à-d :

- 1) L'addition et la multiplication sont commutatives :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x \quad \text{et} \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

- 2) L'addition et la multiplication sont associatives :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{et} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

- 3) L'addition admet un élément neutre 0 tel que :

$$x + 0 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

et la multiplication admet un élément neutre 1 tel que :

$$x \cdot 1 = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $x' = -x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x + x' = 0.$$

et si $x \neq 0$, il existe $x^* = \frac{1}{x}$ tel que :

$$x \cdot x^* = 1.$$

- 5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

- ii) Il y a une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}$: $\mathbb{R}$ **muni de la relation usuelle "inférieur ou égal $\leq$ " est totalement ordonné**. C'est à dire la relation $\leq$ vérifie les propriétés suivantes :

1. **$\leq$ est réflexive :**

En effet ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.

2. **$\leq$ est antisymétrique :**

En effet ; pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors, $x = y$.

3. **$\leq$ est transitive :** En effet ; pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

4. De plus, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a ou bien $x \leq y$, ou bien $y \leq x$ (les éléments de $\mathbb{R}$ sont tous comparables).

iii)

Théorème 2.1. (Propriété d'Archimède)

$\mathbb{R}$ est **Archimédien** : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x > 0$; il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $nx > y$.

iv)

Définition 2.2. (Valeur absolue d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la valeur absolue de x , notée $|x|$, par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposition 2.3. (Propriétés de la valeur absolue d'un réel)

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|x| \geq 0, |x| = |-x|, |x| \geq x, |x| \geq -x, |x| = \max(-x, x) \text{ et } |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

(b) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$|xy| = |x||y|, |x| \leq \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leq x \leq +\alpha; (\alpha \geq 0), \left| |x| - |y| \right| \leq |x + y| \leq |x| + |y| \text{ et } \left| |x| - |y| \right| \leq |x - y| \leq |x| + |y|.$$

v)

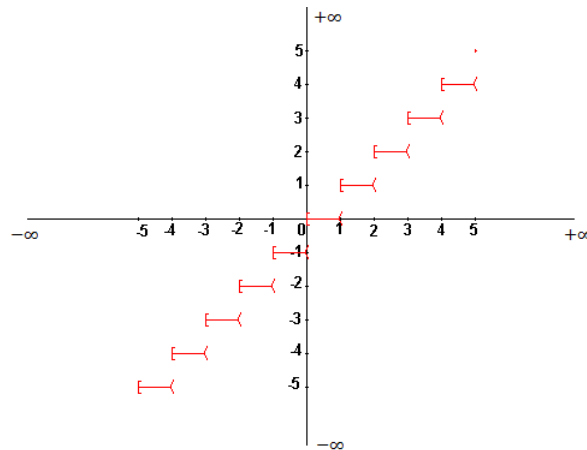
Définition 2.4. (Partie entière d'un réel)

Soit $x \in \mathbb{R}$, le **plus grand entier inférieur ou égal à x** s'appelle la **partie entière de x** . Nous le noterons $E(x)$ ou bien $[x]$.

Exemple 2.5. $E(\pi) = 3$, $E(-\pi) = -4$, $E(0) = 0$, $E(\frac{1}{2}) = 0$, $E(1,5) = 1$, $E(-0,5) = -1$ et $E(-\frac{3}{2}) = -2$.

Définition 2.6. (Fonction partie entière)

La fonction partie entière notée **E** , est définie par $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto E(x)$

**Théorème 2.7. (Propriétés de la fonction partie entière)**

1) Par définition même, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} E(x) \in \mathbb{Z}, \\ E(x) \leq x < E(x) + 1. \end{cases}$$

2) La partie entière d'un nombre réel est unique.

3) Si $x \in \mathbb{R}$, $E(x) + 1$ est le plus petit entier vérifiant :

$$x < E(x) + 1.$$

4) La fonction partie entière est **croissante** sur $\mathbb{R}$, i.e

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad x \leq y \implies E(x) \leq E(y).$$

4) La fonction partie entière vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} : E(x+1) = E(x) + 1.$$

5) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

vi)

Théorème 2.8. (Densité des nombres rationnels et irrationnels dans $\mathbb{R}$)

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ c-à-d ; pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $x < y$, il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que : $x < q < y$ (entre tout deux nombres réels, il existe un nombre rationnel).
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (entre tout deux nombres réels, il existe un nombre irrationnel).

Remarques 2.9. (a) L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$; par exemple il n'existe pas de nombre naturel entre les deux réels 2 et 3.

(b) Ainsi, l'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$; par exemple il n'existe pas de nombre entier relatif entre les deux réels -1 et -2 .

vii)

Définition 2.10. (Intervalle de $\mathbb{R}$)

(a) Soit $I \subseteq \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a : $\forall r \in \mathbb{R}, x \leq r \leq y \Rightarrow r \in I$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $a < b$.

- i. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ est appelé **intervalle fermé** de $\mathbb{R}$ et il est noté par $[a, b]$.
- ii. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ est appelé **intervalle ouvert à gauche et fermé à droite** de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]a, b]$.
- iii. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ est appelé **intervalle ouvert à droite et fermé à gauche** de $\mathbb{R}$ et il est noté par $[a, b[$.
- iv. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ est appelé **intervalle ouvert** de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]a, b[$.
- v. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ est appelé **intervalle ouvert à droite et non borné à gauche** de $\mathbb{R}$ et il est noté par $] - \infty, a[$.
- vi. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ est appelé **intervalle ouvert à gauche et non borné à droite** de $\mathbb{R}$ et il est noté par $]a, +\infty[$.

3 Rappel sur le vocabulaire de base (majorant, minorant, ensemble borné, maximum, minimum, borne supérieure et borne inférieure)

Définition 3.1. (Majorant, minorant) Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$ ($\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$) et $m, M \in \mathbb{R}$.

1. On dit que m est un minorant de A , si $\forall x \in A : x \geq m$.
2. On dit que M est un majorant de A , si $\forall x \in A : x \leq M$.

Exemple 3.2. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, on considère l'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$.

Remarquons que :

- a. $2 \leq 2, 2 \leq \frac{5}{2}$ et $2 \leq 7$, alors 2 est un minorant de A .
Aussi $1 \leq 2, 1 \leq \frac{5}{2}$ et $1 \leq 7$, donc 1 est un autre minorant de A .



Alors, on constate que, pour tout $m \in] - \infty, 2]$, m est un minorant de A .

- b. $2 \leq 7, \frac{5}{2} \leq 7$ et $7 \leq 7$, donc 7 est un majorant de A .
Aussi $2 \leq 8, \frac{5}{2} \leq 8$ et $7 \leq 8$, alors 8 est un autre majorant de A .



Donc, pour tout $M \in [7, +\infty[$, M est un majorant de A .

Exemple 3.3. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ l'ensemble des entiers naturels. Remarquons que :

Pour tout $x \in \mathbb{N}$; $x \geq 0$, c-à-d 0 est un minorant de $\mathbb{N}$, mais comme : $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq n + 1$ nous déduisons que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'admet pas de majorants.

Exemple 3.4. Soit $A =]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } : 0 < x < 1\}$.

Remarquons que :

a. $\forall x \in A : x > 0$, alors 0 est un minorant de A . De plus, $\forall m \in]-\infty, 0]$; m est un minorant de A .



b. $\forall x \in A : x < 1$, alors 1 est un majorant de A . De plus, $\forall M \in [1, +\infty[$, M est un majorant de A .



Remarque 3.5.

1. En général, le majorant et le minorant ne sont pas uniques. (Voir les exemples (3.2), (3.3) et (3.4)).
2. Le majorant et le minorant d'un ensemble peuvent appartenir ou non à A . (Voir les exemples (3.2), (3.3) et (3.4)).

Définition 3.6. (**Ensemble borné**)

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. On dit que l'ensemble A est **minoré (ou borné inférieurement)** dans $\mathbb{R}$, si A **admet au moins un minorant** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \geq m.$$

2. On dit que l'ensemble A est **majoré (ou borné supérieurement)** dans $\mathbb{R}$, si A **admet au moins un majorant** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \leq M.$$

3. On dit que l'ensemble A est **borné** dans $\mathbb{R}$, s'il est **majoré et minoré** dans $\mathbb{R}$, c'est à dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : m \leq x \leq M.$$

Exemple 3.7. 1. L'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$ est borné dans $\mathbb{R}$ car : $\forall x \in A : 1 \leq x \leq 8$.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$ est minoré (borné inférieurement) par 0 mais n'est pas majoré (n'est pas borné supérieurement).

3. L'ensemble $B = \{\cos x, x \in \mathbb{R}\}$ est borné. En effet,

Tout d'abord, remarquons que : $B = \{-1, \dots, 0, \dots, 1\} = [-1, 1]$.

— B est majoré par 1 (puisque pour tout $x \in B$, $\cos x \leq 1$).

— B est minoré par -1 (puisque pour tout $x \in B$, $\cos x \geq -1$).

Définition 3.8. (**Le minimum et le maximum d'un ensemble**)

Soit $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

1. On dit que m est **le plus petit élément (minimum)** de A , si m est **un minorant de A** et $m \in A$. On le note par $\min A$.

$$m = \min A \iff \begin{cases} 1. \forall x \in A : x \geq m, \\ 2. m \in A. \end{cases}$$

2. On dit que M est **le plus grand élément (maximum)** de A , si M est **un majorant de A** et $M \in A$. On le note par **max A** .

$$M = \max A \iff \begin{cases} 1. \forall x \in A : x \leq M, \\ 2. M \in A. \end{cases}$$

Exemple 3.9. 1. On considère l'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$, on a :

- $\min A = 2$, car 2 est minorant de A et $2 \in A$.
 - $\max A = 7$, car 7 est un majorant de A et $7 \in A$.
2. Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
- $\min \mathbb{N} = 0$ car 0 est un minorant de $\mathbb{N}$ et $0 \in \mathbb{N}$.
 - $\max \mathbb{N}$ n'existe pas, car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.
3. Soit $C =]0, 1[$.
- $\min C$ n'existe pas, car il n'existe pas de minorant de A qui appartient à C .
 - $\max C$ n'existe pas, car il n'existe pas de majorant de A qui appartient à C .

Remarques 3.10. 1. Si $\min A$ existe, il est unique.

2. Si $\max A$ existe, il est unique.

3. Un ensemble peut ne pas avoir d'éléments minimum ou maximum. Par exemple $A =]0, 1[$.

Définition 3.11. (Borne supérieure et borne inférieure)

- On dit que M est **la borne supérieure** de A si M est un majorant de A et M est le plus petit des majorants de A . Si la borne supérieure de A existe, on la note par **sup A** . C'est à dire $\sup A = \min\{M; M \text{ est un majorant de } A\}$.
- On dit que m est **la borne inférieure** de A si m est un minorant de A et m est le plus grand des minorants de A . Si la borne inférieure de A existe, on la note par **inf A** . C'est à dire $\inf A = \max\{m; m \text{ est un minorant de } A\}$.

Exemple 3.12. 1. Soit l'ensemble $A = \{2, \frac{5}{2}, 7\}$, on a

- L'ensemble des minorants de A est $] - \infty, 2]$ et comme $\inf A$ représente le plus grand des minorants de A , alors : $\inf A = 2$ et dans ce cas : $\inf A = \min A = 2$ (puisque $2 \in A$).
 - L'ensemble des majorants de A est $[7, +\infty[$ et comme $\sup A$ représente le plus petit des majorants de A , alors : $\sup A = 7$ et dans ce cas : $\sup A = \max A = 7$ (puisque $7 \in A$).
2. Soit $B =]2, 3[$, on a
- L'ensemble des minorants de B est $] - \infty, 2]$ et comme $\inf B$ représente le plus grand des minorants de B , alors : $\inf B = 2$, (dans ce cas $\min B$ n'existe pas).
 - L'ensemble des majorants de B est $[3, +\infty[$ et comme $\sup B$ représente le plus petit des majorants de B , alors : $\sup B = 3$, (dans ce cas $\max B$ n'existe pas).

Remarque 3.13.

- Pour parler du $\sup$ (resp $\inf$), il faut que notre ensemble soit majoré (resp minoré).
- $\inf A$ et $\sup A$ peuvent appartenir ou non à l'ensemble A , comme le montre les exemples ci-dessus.

Lemme 3.14.

- $\inf A$ est un minorant de A .
- $\inf A \in A \implies \min A$ existe et $\min A = \inf A$.
- $\min A$ existe $\implies \inf A$ existe et $\min A = \inf A$.
- $\inf A \notin A \implies \min A$ n'existe pas.
- $\sup A$ est majorant de A .
- $\sup A \in A \implies \max A$ existe et $\max A = \sup A$.
- $\max A$ existe $\implies \sup A$ existe et $\max A = \sup A$.
- $\sup A \notin A \implies \max A$ n'existe pas.

Exemple 3.15.

- Soit $A = [0, 1[$, on a :
 - $\min A$ existe et égale à 0, alors $\inf A$ existe et $\inf A = \min A = 0$.

-
- $\inf A = 0 \in A$, alors $\min A = \inf A = 0$.
 - $\sup A = 1 \notin A$, alors $\max A$ n'existe pas.
 - 2. Soit $B =]-1, 5]$, on a :
 - $\inf B = -1 \notin B$, alors $\min B$ n'existe pas.
 - $\sup B = 5 \in B$, alors $\max B$ existe et $\max B = \sup B = 5$.
 - $\max B = 5$ existe, alors $\sup B$ existe et $\max B = \sup B = 5$.

Théorème 3.16. (*Propriétés de la borne supérieure et de la borne inférieure*)

- Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
- Dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

Théorème 3.17. (*Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure dans $\mathbb{R}$*)

1. $M = \sup A \iff \begin{cases} 1. \forall x \in A : x \leq M \text{ (} M \text{ est un majorant).} \\ 2. \forall \alpha < M; \exists y \in A | \alpha < y \text{ (Tout nombre plus petit que } M \text{ n'est pas un majorant de } A \text{).} \end{cases}$

Ceci est équivalent à dire que :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} 1. \forall x \in A : x \leq M. \\ 2. \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A | M - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

2. $m = \inf A \iff \begin{cases} 1. \forall x \in A : x \geq m \text{ (} m \text{ est un minorant).} \\ 2. \forall \beta > m; \exists z \in A | \beta > z \text{ (Tout nombre plus grand que } m \text{ n'est pas un minorant de } A \text{).} \end{cases}$

Ceci est équivalent à dire que :

$$m = \inf A \iff \begin{cases} 1. \forall x \in A : x \geq m. \\ 2. \forall \varepsilon > 0, \exists y_\varepsilon \in A | m + \varepsilon > y_\varepsilon. \end{cases}$$

Lemme 3.18. Soient A et B deux parties non vide bornées de $\mathbb{R}$. Alors,

1. $A \cup B$ est bornée.
2. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Ainsi,

1. $A \cap B$ est bornée.
2. $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$ et $\inf(A \cap B) \geq \max(\inf A, \inf B)$.

Lemme 3.19. 1. $\sup[a, b] = \max[a, b] = b$ et $\inf[a, b] = \min[a, b] = a$.

2. $\sup]a, b[= \max]a, b[= b$, $\inf]a, b[= a$ et $\min]a, b[$ n'existe pas.

3. $\sup[a, b[= b$, $\max[a, b[$ n'existe pas et $\inf[a, b[= \min[a, b[= a$.

4. $\sup]a, b[= b$, $\inf]a, b[= a$ et $\max]a, b[, \min]a, b[$ n'existent pas.

5. $] - \infty, a[$ n'est pas borné inférieurement, alors $\inf] - \infty, a[$ et $\min] - \infty, a[$ n'existent pas. De plus, $\sup] - \infty, a[= a$ et $\max] - \infty, a[$ n'existe pas.

6. $]a, +\infty[$ n'est pas borné supérieurement, alors, $\sup]a, +\infty[, \max]a, +\infty[$ n'existent pas. De plus, $\inf]a, +\infty[= a$ et $\min]a, +\infty[$ n'existe pas.